- format electronic -

UNIVERSITATEA TEHNICA "GH. ASACHI" DIN IASI
FACULTATEA DE MECANICA
BD. D. MANGERON NR. 61, IASI – 700050, ROMÂNIA
Tel / Fax: 0040 232 232337; http://www.mec.tuiasi.ro

TESTE

DE

MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PENTRU ADMITERE LA

FACULTATEA DE MECANICĂ

Autori:
Mircea ŞTEFANOVICI
Radu STRUGARIU
Dorin CONDURACHE

IAŞI - 2008

Cuprins

Prefaţă

Prezenta culegere se adresează absolvenţilor care doresc să se pregătească temeinic în vederea concursului de admitere în învăţământul superior.

Având în vedere diversitatea datorată existenţei unui mare număr de manuale alternative, ca o consecinţă a procesului de reformă din învăţământ am căutat să unificăm diferitele maniere de prezentare prin alegerea unor probleme pe care le considerăm indispensabile pentru abordarea cu succes a cursurilor de matematică şi fizica din ciclul intai de la Facultatea de Mecanica a Universitatii Tehnice "Gheorghe Asachi" din Iaşi.

La alcătuirea problemelor s-a avut în vedere o reprezentare corespunzătoare atât a părţii de calcul, cât şi a aspectelor de raţionament. Gradul de dificultate al problemelor nefiind cel al unei olimpiade , acestea vor putea fi abordate de orice elev sau absolvent cu o pregătire medie a părţii teoretice şi care posedă deprinderi de calcul corespunzătoare.

Problemele sunt prezentate după modelul „test", cu cinci răspunsuri fiecare, dintre care unul singur este corect. Pentru problemele cu un grad mai mare de dificultate, autorii au considerat necesar să dea indicaţii pentru rezolvare.

Ţinând cont de faptul că prezenta carte va fi folosită şi la întocmirea subiectelor pentru concursul de admitere la Facultatea de Mecanica a Universitatii Tehnice "Gheorghe Asachi" din Iaşi , invităm absolvenţii de liceu să rezolve testele din acest volum, adăugându-şi astfel cunoştinţe noi la cele deja existente şi implicându-se prin aceasta în demersul de evaluare a propriilor competenţe.

CAPITOLUL 1

Probleme Matematică

Problema 1.1. *Să se rezolve inecuaţia:*

$$\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+2}\leq\frac{1}{2(x-1)}.$$

a) $x\in(-\infty,-2)$; *b)* $x\in(-\infty,-1)\cup\left[0,\frac{2}{3}\right)\cup(1,2)$; *c)* $x\in\left(0,\frac{2}{3}\right)\cup[1,2]\cup(3,\infty)$; *d)* $x\in(-\infty,-2)\cup\left[0,\frac{2}{3}\right]\cup(1,2)$; *e)* $x\in(1,2)\cup(3,\infty)$.

Soluţie 1.1. *Trecând într-un singur membru şi aducând la acelaşi numitor se obţine* $\frac{3x(3x-2)}{2(x-2)(x^2-4)}\leq 0$. *Se sistematizează semnele factorilor într-un tabel. Răspuns corect d).*

Problema 1.2. *Să se rezolve inecuaţia :*

$$|x|+x<x^2.$$

a) $x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$; *b)* $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$; *c)* $x\in(-\infty,2)\cup(3,\infty)$; *d)* $x\in(3,\infty)$; *e)* $x\in\mathbb{R}$.

Soluţie 1.2. *Explicitând* $|x|$, *pentru* $x<0$ *inecuaţia este verificată, iar pentru* $x\geq 0$ *se obţin soluţiile* $x\in(2,\infty)$. *Răspuns corect b).*

Problema 1.3. *Să se afle minimul expresiei :*

$$E=a^2+2b^2-3a+3b,$$

pentru $a,b\in\mathbb{R}$.
a) -3; *b)* $-\frac{27}{8}$; *c)* $-\frac{9}{4}$; *d)* -1; *e)* 1.

Soluţie 1.3. *Expresia se pune sub forma* $E=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+2\left(b+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{27}{8}\geq -\frac{27}{8}$. *Răspuns corect b).*

Problema 1.4. *Să se determine* $p,q\in\mathbb{R}$, *dacă funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+px+q$ *are maximul egal cu 4 în punctul* $x=-1$.
a) $p=-2,q=3$; *b)* $p=-1,q=2$; *c)* $p=3,q=-2$; *d)* $p=2,q=-3$; *e)* $p=q=1$.

SOLUŢIE 1.4. *Maximul funcţiei* $ax^2 + bx + c (a < 0)$ *se obţine pentru* $x = -\frac{b}{2a}$ *şi este egal cu* $\frac{4ac - b^2}{4a}$. *Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.5. *Să se determine valorile parametrului* $m \in \mathbb{R}$, *astfel încât inegalitatea:*

$$(m-1)x^2 - (m+1)x + m + 1 \leq 0$$

să aibă loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
a) $m \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{5}{3}, \infty\right)$; *b)* $m \in (-\infty, -1]$; *c)* $m \in \left[\frac{5}{3}, \infty\right)$; *d)* $m \in (-\infty, 1)$; *e)* $m \in \left[-1, \frac{5}{3}\right]$.

SOLUŢIE 1.5. *Trinomul de gradul al doilea* $ax^2 + bx + c \leq 0$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *în condiţiile* $a < 0$ *şi* $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$. *Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.6. *Să se determine* $m \in \mathbb{R}$, *astfel ca rădăcinile* x_1 *şi* x_2 *ale ecuaţiei* $x^2 - (2m-3)x + m - 1 = 0$ *să satisfacă relaţia* $3x_1 - 5x_1x_2 + 2x_2 = 0$.
a) $m_1 = 2, m_2 = 3$; *b)* $m_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7}$; *c)* $m_1 = 2, m_2 = -2$; *d)* $m_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$; *e)* $m_{1,2} = \pm\sqrt{5}$.

SOLUŢIE 1.6. *Relaţiile lui Viéte pentru ecuaţia dată sunt* $x_1 + x_2 = 2m - 3$ *şi* $x_1x_2 = m - 1$. *Se formează un sistem împreună cu relaţia dată. Rezultă* $x_1 = m + 1, x_2 = m - 4$. *Răspuns corect b).*

PROBLEMA 1.7. *Se dă ecuaţia* $4x^2 - 4(m-1)x - m + 3 = 0$ *şi se cer valorile lui* m *astfel încât să avem* $4(x_1^3 + x_2^3) = m - 1$, *unde* x_1 *şi* x_2 *sunt rădăcinile ecuaţiei date.*
a) $m_1 = 1, m_2 = -2, m_3 = \frac{4}{3}$; *b)* $m_1 = 1, m_2 = -2, m_3 = \frac{3}{4}$; *c)* $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = \frac{3}{4}$; *d)* $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = -\frac{3}{4}$; *e)* $m_1 = -1, m_2 = -2, m_3 = -\frac{3}{4}$.

SOLUŢIE 1.7. *Relaţiile lui Viéte pentru ecuaţia dată sunt* $S = x_1 + x_2 = m - 1$ *şi* $P = x_1x_2 = \frac{3-m}{4}$. *Atunci* $x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3(x_1+x_2)x_1x_2 = S^3 - 3PS = \frac{(m-1)(4m^2 - 11m + 12)}{4}$. *Răspuns corect d).*

PROBLEMA 1.8. *Să se rezolve ecuaţia iraţională :*

$$\sqrt{1 - x^2} + x = 1.$$

a) $x_1 = 0, x_2 = 1$; *b)* $x_1 = -1, x_2 = 1$; *c)* $x_1 = -1, x_2 = 0$; *d)* $x_1 = 1, x_2 = 2$; *e)* $x_1 = 0, x_2 = 2$.

SOLUŢIE 1.8. *Domeniul de existenţă al ecuaţiei este* $x \in [-1, 1]$. *Ridicând la pătrat* $(1 - x \geq 0)$ *se obţine* $x^2 - x = 0$. *Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.9. *Rezolvaţi în* $\mathbb{R}$ *inecuaţia :*

$$\left|x^2 - 3x + 2\right| < |1 - x|.$$

a) $x \in (1,3]$; *b)* $x \in (1,3)$; *c)* $x \in (2,4)$; *d)* $x \in [2,4]$; *e)* $x \in (-1,4]$.

SOLUŢIE 1.9. *Se explicitează modulele şi se rezolvă inecuaţia în cele trei cazuri. Altfel, inecuaţia dată este echivalentă cu* $|x-1|\,|x-2| < |x-1|$. *Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.10. *Să se determine soluţiile reale ale sistemului :*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 91 \\ x + y + \sqrt{xy} = 13 \end{cases}.$$

a) $\{(2,1),(1,2)\}$; *b)* $\{(1,1)\}$; *c)* $\{(2,2)\}$; *d)* $\{(1,9),(9,1)\}$; *e)* $\{(1,3),(3,1)\}$.

SOLUŢIE 1.10. *Notând* $x+y = S, xy = P$ *sistemul devine* $S^2 - P = 91, S + \sqrt{P} = 13$, *de unde* $S - \sqrt{P} = 7$. *Deci* $S = 10, P = 9$. *Răspuns corect d).*

PROBLEMA 1.11. *Determinaţi valoarea lui x pentru care* $e^x + e^{-x} = 2$.
a) 1; *b)* -1; *c)* 2; *d)* 0; *e)* -2.

SOLUŢIE 1.11. *Notând* $e^x = y$ *rezultă ecuaţia* $y + \frac{1}{y} = 2$ *de unde* $y = 1$. *Răspuns corect d).*

PROBLEMA 1.12. *Să se rezolve inecuaţia:*

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}.$$

a) $x \in (4,\infty)$; *b)* $x \in [-2,1)$; *c)* $x \in (2,\infty)$; *d)* $x \in (1,\infty)$; *e)* $x \in (0,10)$.

SOLUŢIE 1.12. *Inecuaţia se scrie* $3^{-\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$ *de unde* $\sqrt{x+2} < x, x \geq 0$. *Răspuns corect c).*

PROBLEMA 1.13. *Să se rezolve ecuaţia :*

$$lgx^2 + 2lgx = 23.$$

a) $x = 10$; *b)* $x = 100$; *c)* $x = 1000$; *d)* $x = 1$; *e)* $x = 2$.

SOLUŢIE 1.13. *Ecuaţia se scrie* $4lgx = 8$. *Răspuns corect b).*

PROBLEMA 1.14. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$2log_2(2x - 5) = log_2(x^2 - 8)$$

a) $x_1 = \frac{11}{3}, x_2 = 3$; *b)* $x_1 = \frac{11}{3}, x_2 = -3$; *c)* $x_1 = -\frac{11}{3}, x_2 = 3$; *d)* $x_1 = -\frac{11}{3}, x_2 = -3$; *e)* $x_1 = \frac{11}{3}$.

SOLUŢIE 1.14. *Condiţiile de existenţă a logaritmilor sunt* $2x-5>0$ *şi* $x^2-8>0$. *Ecuaţia devine* $(2x-5)^2=x^2-8$. *Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.15. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$log_{x^2}(x+2)+log_x(x^2+2x)=4.$$

a) $x=1$; *b)* $x=-1$; *c)* $x=2$; *d)* $x=4$; *e)* $x=3$.

SOLUŢIE 1.15. *Condiţii de existenţă* $x>0, x\neq 1$. *Alegând baza logaritmilor* x, *se obţine ecuaţia* $\frac{1}{2}log_x(x+2)+1+log_x(x+2)=4$, *de unde* $log_x(x+2)=2$ *adică* $x+2=x^2$. *Răspuns corect c).*

PROBLEMA 1.16. *Să se rezolve inecuaţia:*

$$log_a x-log_{a^2}x+log_{a^4}x\geq\frac{3}{4}, a>0, a\neq 1.$$

a) $x\in(a,\infty)$; *b)* $x\in[a,\infty)$; *c)* $x\in\left(\frac{a}{4},\infty\right)$; *d)* $x\in(0,\infty)$; *e)* $x\in(3a,4a)$.

SOLUŢIE 1.16. *Condiţia de existenţă este x>0. Trecând toţi logaritmii în baza a, se obţine* $log_a x-\frac{1}{2}log_a x+\frac{1}{4}log_a x\geq\frac{3}{4}$, *de unde* $log_a x\geq 1$. *Răspuns corect b).*

PROBLEMA 1.17. *Se consideră expresia*

$$E(x)=log_4 x+log_x 4.$$

Determinaţi valorile lui $x\in\mathbb{R}$ *astfel încât* $E(x)<\frac{5}{2}$.
a) $x\in(1,2)$; *b)* $x\in(0,1)\cup(2,16)$; *c)* $x\in[1,2]\cup[16,32]$; *d)* $x\in(16,\infty)$; *e)* $x\in(1,2)\cup(20,\infty)$.

SOLUŢIE 1.17. *Notând* $log_4 x=y(x>0)$ *se obţine* $y+\frac{1}{y}<\frac{5}{2}$. *Se aduce la acelaşi numitor, dar se ţine cont de semnul acestuia. Rezultă* $y\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$. *Răspuns corect b).*

PROBLEMA 1.18. *Să se precizeze în care din mulţimile de mai jos se află toate numerele naturale n care verifică relaţia:*

$$C_{3n-2}^{n}=A_{2n-1}^{n-1}$$

a) $A_1=\mathbb{N}\backslash\{1,2,3,4,7,9\}$; *b)* $A_2=\mathbb{N}\backslash\{2,3,4,5,6,9,30\}$; *c)* $A_3=(9,30)$; *d)* $A_4=\{2k+1,k\in\mathbb{N}\}$; *e)* $A_5=\mathbb{N}\backslash\{2,3,5,7,9,30\}$.

SOLUŢIE 1.18. *Ecuaţia dată se poate scrie:* $\frac{(3n-2)!}{(2n-2)!(2n-1)!}=1$.*Notând membrul stâng cu* a_n *deducem că* $a_1=1$ *şi pentru* $n\geq 2, (a_n)_{n\geq 2}$ *este un şir strict descrescător. În plus,* $a_2=2, a_3=\frac{7}{4}, a_4=1$ *şi* $a_n<1$ *pentru* $n\geq 5$. *Răspuns corect e).*

PROBLEMA 1.19. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$3C_{x+1}^2 + x \cdot P_2 = 4A_x^2.$$

a) $x = 3$; *b)* $x = 4$; *c)* $x = 5$; *d)* $x = 2$; *e)* $x = 7$.

SOLUŢIE 1.19. *Condiţii* $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$. *Ecuaţia se scrie* $3\dfrac{(x+1)x}{2} + 2x = 4x(x-1)$. *Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.20. *Câţi termeni care nu conţin radicali sunt în dezvoltarea binomului* $\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}\right)^{16}$ *?*
a) un termen; b) doi termeni; c) trei termeni; d) nici unul; e) şase termeni.

SOLUŢIE 1.20. *Termenul general al dezvoltării binomiale este*

$$T_{k+1} = C_{16}^k \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{16-k} x^{\frac{k}{4}}, k \in \{0, 1, \ldots, 16\}.$$

Exponentul lui x *este un număr întreg, dacă* $128 - 5k$ *se divide prin* 12. *Acest lucru se întâmplă pentru* $k = 4$ *şi* $k = 16$. *Răspuns corect b).*

PROBLEMA 1.21. *Determinaţi valoarea celui mai mare coeficient binomial al dezvoltării binomului* $(a+b)^n$, *dacă suma tuturor coeficienţilor binomiali este egală cu* 256.
a) 1; *b)* 8; *c)* 60; *d)* 70; *e)* 28.

SOLUŢIE 1.21. *Suma coeficienţilor binomiali este* $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n = 256$ *pentru* $n = 8$. *Cel mai mare coeficient* C_8^k *este egal cu* 70 *pentru* $k = 4$. *Răspuns corect d).*

PROBLEMA 1.22. *Să se găsească primul termen* a_1 *şi raţia* r *unei progresii aritmetice* $(a_n)_{n \geq 1}$ *dacă :*

$$a2 - a6 + a4 = -7 \text{ şi } a8 - a7 = 2a4.$$

a) $a_1 = -4, r = 3$; *b)* $a_1 = -4, r = 4$; *c)* $a_1 = -3, r = 1$; *d)* $a_1 = -5, r = 2$; *e)* $a_1 = -2, r = 2$.

SOLUŢIE 1.22. *Termenul general al unei progresii aritmetice este* $a_n = a_1 + (n-1)r$. *Condiţiile date devin* $a_1 - r = -7$ *şi* $2a_1 + 5r = 0$. *Răspuns corect d).*

PROBLEMA 1.23. *Suma a trei numere în progresie aritmetică este egală cu 12. Dacă se adaugă acestora, respectiv numerele 1, 2, 11, progresia devine geometrică . Să se afle aceste numere.*
a) 5,4,7 şi 15,14,13 ; b) 1,4,7 şi 17,4,-9 ; c) 6,8,10 ; d) 1,3,5 şi 17,15,13 ; e) 5,9,13 şi 18,14,10.

SOLUŢIE 1.23. *Fie cele trei numere în progresie aritmetică* $a - r, a, a + r$. *Din prima condiţie rezultă* $a = 4$, *deci numerele sunt* $4 - r, 4$ *şi* $4 + r$. *A doua condiţie se scrie* $(5 - r)(15 + r) = r^2$, *de unde* $r = 3$ *sau* $r = -13$. *Răspuns corect b).*

PROBLEMA 1.24. *Să se calculeze expresia*

$$E = \frac{1 + a^2 + a^4 + \ldots + a^{2n} - 2}{1 + a + a^2 + \ldots + a^n - 1},$$

pentru $a \neq 1$.
a) $\frac{a^n + 1}{a + 1}$; *b)* $\frac{a^n + 1}{a}$; *c)* $\frac{a^{2n} + 1}{a^n + 1}$; *d)* a; *e)* 1.

SOLUŢIE 1.24. *Suma progresiei geometrice* $1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}, a \neq 1$. *Atunci* $1 + a^2 + a^4 + \ldots + a^{2n-2} = \frac{1 - a^{2n}}{1 - a^2}, a \neq 1$. *Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.25. *Să se determine valoarea parametrului real* m *astfel încât polinomul*

$$P(x) = x^4 - x^2 + 2x - 1 + m$$

să se dividă cu $x + 1$.
a) 0; *b)* -1; *c)* 3; *d)* 1; *e)* -1.

SOLUŢIE 1.25. *Condiţia este* $P(-1) = m - 3 = 0$. *Răspuns corect c).*

PROBLEMA 1.26. *Fie* P *un polinom cu coeficienţi reali. Dacă resturile împărţirii lui* P *la* $x - a$ *şi* $x - b, (a \neq b)$ *sunt egale, să se determine restul împărţirii lui* P *la polinomul* $(x - a)(x - b)$.
a) $ax + b$; *b)* $bx + a$; *c)* $P(a)$; *d)* $bx + 1$; *e)* $x + a$.

SOLUŢIE 1.26. *Resturile împărţirii lui* P *sunt* $P(b) = P(a)$. *Teorema împărţirii cu rest se scrie* $P(x) = (x - a)(x - b)Q(x) + R(x)$, *unde restul* $R(x) = mx + n$. *Pentru* $x = a$ *şi* $x = b$ *se obţine* $P(a) = ma + n = P(b) = mb + n$, *de unde* $m = 0$ *şi* $n = P(a)$. *Răspuns corect c).*

PROBLEMA 1.27. *Determinaţi ordinul de multiplicitate* $m \in \mathbb{N}$ *al rădăcinii* $x = 2$ *a ecuaţiei :*

$$x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0.$$

a) 0; *b)* 1; *c)* 2; *d)* 3; *e)* 4.

SOLUŢIE 1.27. *Se aplică schema lui Horner*

	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	0
2	1	-1	-1	-2	0	
2	1	1	1	0		

iar ecuaţia $x^2 + x + 1$ *nu are rădăcini reale. Răspuns corect d).*

PROBLEMA 1.28. *Determinaţi polinomul unitar de grad minim cu coeficienţi raţionali care admiteca rădăcini* $x_1 = 1 + \sqrt{5}$ *şi* $x_2 = \frac{13}{2 - i}$.
a) $13X^4 + 46X^3 - 13X^2 + 30X + 100$; *b)* $X^4 + 10X^3 - X^2 + 5$; *c)* $X^4 - 6X^3 + 17X^2 - 10X - 52$; *d)* $13X^4 - 46X^3 + 13X^2 + 30X - 100$; *e)* $X^4 - 3X^2 + 5X + 6$.

SOLUŢIE 1.28. $x_2 = 2 + 3i$. *Polinomul admite şi rădăcinile conjugate* $x_3 = 1 - \sqrt{5}, x_4 = 2 - 3i$, *prin urmare*

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - x1)(X - x2)(X - x3)(X - x4) \\ &= [X^2 - (x_1 + x_3)X + x_1x_3][X^2 - (x_2 + x_4)X + x_2x_4] \\ &= (X^2 - 2X - 4)(X^2 - 4X + 13). \end{aligned}$$

Răspuns corect c).

PROBLEMA 1.29. *Să se găsească valorile reale ale lui* m *pentru care numărul*

$$M = 3i^{43} - 2mi^{42} + (1 - m)i^{41} + 5$$

este real $(i^2 = -1)$.
a) $m = -1$; *b)* $m = -2$; *c)* $m = -\frac{5}{2}$; *d)* $m = 3$; *e)* $m = 1$.

SOLUŢIE 1.29. *Deoarece* $i^{4n} = 1$, *rezultă* $i^{40} = 1, i^{41} = i, i^{42} = -1, i^{43} = -i$, *deci* $M = 2m + 5 + i(-m - 2)$. *Răspuns corect b).*

PROBLEMA 1.30. *Să se determine toate numerele complexe* $z \in \mathbb{C}$ *care verifică ecuaţia*

$$|z| - z = 1 + 2i.$$

a) $z = -\frac{1}{2} + i$; *b)* $z_1 = -\frac{1}{2} + i, z_2 = \frac{3}{2} - 2i$; *c)* $z_1 = 0, z_2 = \frac{3}{2} + 2i$; *d)* $z = \frac{3}{2} - 2i$; *e)* $z_1 = 0, z_2 = -\frac{1}{2} + i$.

SOLUŢIE 1.30. *Se consideră* $z = x+iy$, *deci* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Se obţine sistemul* $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + x, y = -2$. *Răspuns corect d).*

PROBLEMA 1.31. *Soluţiile ecuaţiei* $z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0$ *sunt:*
a) $i - 3, i - 2$; *b)* $3i, 2 - i$; *c)* $2i, 3 - i$; *d)* $2 - i, 3 - i$; *e)* $5 - 2i, 1 - i$.

SOLUŢIE 1.31. $z_{1,2} = \frac{1}{2}(-5 + 2i \pm 1)$. *Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.32. *Se consideră ecuaţia* $(2-i)z^2 - (7+4i)z + 6 + mi = 0$, *în care* $z \in \mathbb{C}$ *este necunoscuta, iar* m *este un parametru real. Să se determine valorile lui* m *pentru care ecuaţia admite o rădăcină reală.*
a) $m \in \left\{-12, \frac{33}{5}\right\}$; *b)* $m = 32$; *c)* $m \in \{2, 5\}$; *d)* $m \in \left\{12, \frac{33}{4}\right\}$; *e)*$m \in \left\{0, \frac{33}{5}\right\}$.

SOLUŢIE 1.32. *Ecuaţia se scrie* $(2z^2 - 7z + 6) - i(z^2 + 4z - m) = 0$, *aşadar ecuaţiile* $2z^2 - 7z + 6 = 0$ *şi* $z^2 + 4z - m = 0$ *trebuie să aibă rădăcini comune. Prima ecuaţie are rădăcinile* $z_1 = 2$ *şi* $z_2 = \frac{3}{2}$. *Din a doua ecuaţie se obţine răspunsul corect d).*

PROBLEMA 1.33. *Să se calculeze rădăcina pătrată din numărul complex* $z = -3+4i, (i=\sqrt{-1})$.
a) $2+i, 2-i$; *b)* $1+2i, -1+2i$; *c)* $1+2i, -1-2i$; *d)* $-2+i, 2+i$; *e)* $1-2i, -1-2i$.

SOLUŢIE 1.33. *Se consideră* $z = x+iy$, *deci* $x^2-y^2+2xyi = -3+4i$, *de unde* $x^2-y^2=-3$ *şi* $y=\frac{2}{x}$. *Răspuns corect b).*

PROBLEMA 1.34. *Să se afle poziţia celui de al treilea vârf al triunghiului echilateral, ştiind că afixele a două vârfuri sunt:* $z_1 = 1, z_2 = 2+i$.
a) $\frac{1}{2}[(3-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})]$; *b)* $\frac{1}{2}[(3+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})]$; *c)* $3+i$; *d)* i; *e)* $\frac{1}{2}[(3-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})]$ *şi* $\frac{1}{2}[(3+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})]$.

SOLUŢIE 1.34. *Condiţia este :*

$$|z-z_1| = |z-z_2| = |z_1-z_2|,$$

de unde $(x-1)^2+y^2 = (x-2)^2+(y-1)^2 = 2$. *Răspuns corect e).*

PROBLEMA 1.35. *Să se rezolve ecuaţia matriceală*

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; *b)* $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; *c)* $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; *d)* $X = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$; *e)* $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

SOLUŢIE 1.35. *X este o matrice cu 2 linii şi 3 coloane* $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$. *Se obţin 2 sisteme pentru* a, b, c *şi respectiv* d, e, f. *Altfel, ecuaţia* $XA = B$ *are soluţia* $X = BA^{-1}$. *Răspuns corect e). Se verifică.*

PROBLEMA 1.36. *Care sunt soluţiile ecuaţiei*

$$\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0?$$

a) $x_1 = 3, x_2 = 7, x_3 = -1$; *b)* $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$; *c)* $x_1 = 7, x_2 = 5, x_3 = -5$; *d)* $x_1 = x_2 = 7, x_3 = 1$; *e)* $x_1 = 7, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$.

SOLUŢIE 1.36. *Dezvoltând determinantul, se obţine ecuaţia* $x^3-7x^2-3x+21 = 0$. *Răspuns corect e).*

PROBLEMA 1.37. *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} 2x+3y+z=11 \\ x+2y+3z=14 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases}.$$

a) $x=1, y=2, z=3$; *b)* $x=2, y=1, z=1$; *c)* $x=3, y=2, z=2$; *d)* $x=1, y=1, z=4$; *e)* $x=1, y=3, z=2$.

SOLUŢIE 1.37. *Determinantul sistemului este egal cu* $18 \neq 0$, *deci se poate rezolva prin regula lui Cramer. Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.38. *Să se determine* $m \in \mathbb{R}$ *astfel ca sistemul:*

$$\begin{cases} 2x+y=8 \\ x-y=1 \\ 5x+4y=m \end{cases}$$

să fie compatibil.
a) 0; *b)* 1; *c)* 20; *d)* 23; *e)* 8.

SOLUŢIE 1.38. *Din primele două ecuaţii se obţin* $x=3$ *şi* $y=2$, *valori care trebuie să verifice şi cea de-a treia ecuaţie. Răspuns corect d).*

PROBLEMA 1.39. *Să se determine* $m \in \mathbb{R}$ *astfel ca sistemul omogen :*

$$\begin{cases} 2x+my+z=0 \\ 2x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

să fie compatibil nedeterminat.
a) 0; *b)* 1; *c)* -1; *d)* 2; *e)* -2.

SOLUŢIE 1.39. *Un sistem omogen este întotdeauna compatibil, deoarece admite cel puţin soluţia nulă. Pentru a fi nedeterminat este necesar ca determinantul sistemului să fie nul.* $\Delta = -4-4m = 0$. *Răspuns corect c).*

PROBLEMA 1.40. *Pe* $\mathbb{R}$ *se consideră legea de compoziţie internă* $*$ *definită astfel:*

$$x * y = 2xy - 2x - 2y + m, m \in \mathbb{R}.$$

Să se determine m astfel încât această lege să fie asociativă.
a) $m=1$; *b)* $m=-1$; *c)* $m=2$; *d)* $m=3$; *e)* $m=-2$.

SOLUŢIE 1.40. *Din condiţia de asociativitate* $(x*y)*z = x*(y*z), \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ *rezultă* $4x+2(m-1)z = 2(m-1)x+4z$. *Răspuns corect d).*

PROBLEMA 1.41. *În mulţimea* $[0,+\infty)$ *este definită legea de compoziţie internă* $*$ *definită prin:*

$$x * y = \frac{x^2+y^2+xy+x+y}{1+x+y}.$$

Determinaţi elementul neutru al acestei legi.
a) 1; *b)* -1; *c)* $\frac{1}{2}$; *d)* 0; *e)* 2.

Soluţie 1.41. *Elementul neutru e trebuie să verifice* $x * e = e * x = x, \forall x \in [0, +\infty)$. *Acest lucru se transcrie* $\dfrac{x^2 + e^2 + xe + x + e}{1 + x + e} = x$, *de unde se obţine* $e(e+1) = 0$. *Răspuns corect b).*

Problema 1.42. *Pe mulţimea* $\mathbb{R}$ *se definesc legile de compoziţie internă* $*$ *şi* $\circ$ *astfel:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$a * b = 2a + 2b + 2ab + 1, a \circ b = 2a + 2b + ab + 2.$$

Sistemul

$$\begin{cases} (x + y) * 2 = 35 \\ (x - y) \circ 3 = 13 \end{cases}$$

are soluţiile:
a) $x = 3, y = 2$; *b)* $x = 1, y = 0$; *c)* $x = 2, y = 3$; *d)* $x = 2, y = 2$; *e)* $x = 1, y = 1$.

Soluţie 1.42. *Sistemul se transcrie* $6x + 6y = 30$ *şi* $5x - 5y = 5$. *Răspuns corect a).*

Problema 1.43. *Pe mulţimea* $\mathbb{R}$ *a numerelor reale definim legea de compoziţie* $*$ *astfel:*

$$x * y = (x + y - xy + 1),$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$. *Să se determine elementele simetrizabile şi simetricul fiecăruia dintre acestea.*
a) $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, x' = \dfrac{x+3}{x-1}$; *b)* $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, x' = \dfrac{2x+1}{x+1}$; *c)* $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}, x' = \dfrac{x-2}{2x-1}$; *d)* $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}, x' = \dfrac{x+4}{2x-1}$.

Soluţie 1.43. *Elementul neutru e se află din ecuaţia* $x*e = \frac{1}{2}(x+e-xe+1) = x$, *de unde* $e = -1$.*Elementul* x' *simetric elementului* x *satisface* $x * x' = x' * x = e$, *adică* $\frac{1}{2}(x + x' - xx' + 1) = -1$.*Se obţine* $x' = \dfrac{x+3}{x-1}$, *pentru* $x \neq 1$, *deci răspunsul corect este a).*

Problema 1.44. *Pe* $\mathbb{R}$ *se defineşte legea de compoziţie*

$$x * y = ax + by, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

unde a şi b sunt parametri reali. Legea $*$ *defineşte pe* $\mathbb{R}$ *o structură de grup pentru:*
a) $a = 1, b = 0$; *b)* $a = 0, b = 3$; *c)* $a = 0, b = 1$; *d)* $a = 1, b = 1$; *e)* $a = b = 2$.

Soluţie 1.44. *Din asociativitate se obţine* $a^2 = a$ *şi* $b^2 = b$, *iar din comutativitate* $(x * y = y * x, \forall x, y \in \mathbb{R})$ *rezultă* $a = b$. *Răspuns corect d), legea de compoziţie fiind adunarea.*

Problema 1.45. *Pentru ce valori ale parametrului real* λ *intervalul* $(2, +\infty)$ *este monoid în raport cu legea de compoziţie definită pe* $\mathbb{R}$ *prin :*

$$x * y = xy - 2x - 2y + \lambda, \forall x, y \in \mathbb{R}?$$

a) $\lambda \in (-\infty, 6)$; *b)* $\lambda \in (6, +\infty)$; *c)* $\lambda = 6$; *d)* $\lambda = 0$; *e)* $\lambda \in (0, +\infty)$.

Soluţie 1.45. *Din condiţia de asociativitate se obţine* $4x+(\lambda-2)z = (\lambda-2)x+4z, \forall x, z \in \mathbb{R}$. *Răspunsul corect este c), elementul neutru fiind* $e = 3 \in (2, +\infty)$.

Problema 1.46. *Fie* $\mathbb{Z}$ *mulţimea numerelor întregi. Se ştie că mulţimile* $(\mathbb{Z}, *)$ *şi* $(\mathbb{Z}, \circ)$ *au structură de grup în raport cu operaţiile definite prin egalităţile :*

$$x * y = x + y + 1, x \circ y = x + y - 1.$$

Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ *astfel încât funcţia* $f(x) = ax + 3 - a, f : (\mathbb{Z}, *) \to (\mathbb{Z}, \circ)$ *să fie un izomorfism de grupuri.*
a) $a = 1$; *b)* $a = 2$; *c)* $a = 3$; *d)* $a = 0$; *e)* $a = -1$.

Soluţie 1.46. *Condiţia ce se impune este* $f(x * y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$. *Se obţine* $a(x + y + 1) + 3 - a = (ax + 3 - a) + (ay + 3 - a) - 1$. *Răspuns corect e).*

Problema 1.47. *Fie inelul* $(\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ *unde:*

$$x \oplus y = x + y + 2 \text{ şi } x \otimes y = xy + 2x + 2y + 2.$$

Să se determine divizorii lui zero în acest inel.
a) $\{-2, 2\}$; *b)* $\{0, -1\}$; *c)* $\{-2, -4\}$; *d)* $\{2, 4\}$; *e) nu există;*

Soluţie 1.47. *Elementul zero este* θ *care satisface* $x \oplus \theta = x + \theta + 2 = x$, *deci* $\theta = -2$. *Divizorii lui zero* (θ) *sunt acele numere* $x, y \in \mathbb{Z}$, *dar diferite de zero* (θ), *care satisfac* $x \otimes y = \theta$ *(zero). Se obţine* $xy + 2x + 2y + 2 = -2$, *adică* $(x + 2)(y + 2) = 0$. *Răspuns corect e).*

Problema 1.48. *Fie* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Pe mulţimea* $\mathbb{R}$ *se definesc legile de compoziţie:*

$$x \oplus y = ax + by - 2, x \otimes y = xy - 2x - 2y + c.$$

Să se determine a, b *şi* c *astfel încât* $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ *să fie un inel.*
a) $a = b = c = 1$; *b)* $a = b = c = 6$; *c)* $a = b = 1, c = 6$; *d)* $a = b = c = 3$; *e)* $a = b = c = 2$.

Soluţie 1.48. *Din asociativitatea operaţiei* $\oplus$ *se obţine* $a^2x + aby + bz - 2a = ax + abz + b^2z - 2b, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$, *de unde* $a^2 = a, b^2 = b$ *şi* $a = b$. *Prin urmare* $a = b = 1$ *(nu pot fi nuli). Din asociativitatea operaţiei* $\otimes$ *se obţine* $4x + 4y + (c - 2)z - 2c = (c - 2)x + 4y + 4y - 2c, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$. *Răspuns corect c).*

Problema 1.49. *Legile* $x \oplus y = x + y - 4$ *şi* $x \otimes y = xy - 4x - 4y + 20$ *determină pe* $\mathbb{R}$ *o structură de corp comutativ. Să se determine elementele neutre ale corpului faţă de cele două legi.*
a) $4, 5$; *b)* $0, 1$; *c)* $2, 0$; *d)* $1, 1$; *e)* $0, 0$.

Soluţie 1.49. *Elementul neutru* θ *faţă de legea* $\oplus$ *satisface* $x \oplus \theta = x + \theta - 4 = x$, *iar elementul neutru* u *faţă de legea* $\otimes$ *satisface* $x \otimes u = xu - 4x - 4u + 20 = x$. *Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.50. *Care sunt soluţiile sistemului:*

$$\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{2} \end{cases}$$

în $\mathbb{Z}_{12}$ *(inelul claselor de resturi modulo 12)?*
a) $x = \hat{2}, y = \hat{7}$; *b)* $x = \hat{1}, y = \hat{4}$; *c)* $x = \widehat{10}, y = \hat{3}$; *d) incompatibil ; e)* $x = \widehat{11}, y = \hat{2}$.

SOLUŢIE 1.50. *Înmulţind prima ecuaţie cu* $\hat{3}$*, a doua cu* $\hat{2}$ *şi adunându-le, se obţine* $(\hat{9} + \hat{8})x + (\hat{6} + \hat{6})y = \hat{3} + \hat{4}$*, adică* $\hat{5}x = \hat{7}$*. Singura soluţie este* $x = \widehat{11}$*. Înlocuind în sistem rezultă* $\hat{2}y = \hat{4}$ *şi* $\hat{3}y = \hat{6}$ *cu singura soluţie comună* $y = \hat{2}$*. Deci răspunsul corect este e).*

PROBLEMA 1.51. *Să se calculeze limita şirului cu termenul general*

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

a) 1; *b)* $\frac{1}{2}$; *c)* 2; *d)* $\frac{1}{3}$; *e)* 0.

SOLUŢIE 1.51. *Termenul general se scrie*

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.52. *Să se calculeze limita şirului cu termenul general*

$$a_n = \frac{3n}{n!}$$

a) 1; *b)* 0; *c)* 3; *d)* 1; *e)* 2.

SOLUŢIE 1.52. *Termenul* $a_{n+1} = \frac{3(n+1)}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1}a_n < a_n$*, pentru* $n > 2$*. Aşadar şirul este monoton descrescător. Deoarece este şi mărginit* $0 < a_n \leq a_2$*, şirul are limită finită L. Trecând la limită în relaţia de recurenţă* $a_{n+1} = \frac{3}{n+1}a_n$*, se obţine* $L = 0 \cdot L$*. Răspuns corect b).*

PROBLEMA 1.53. *Să se calculeze:*

$$\lim_{x \to 7} \frac{(2 - \sqrt{x-3})}{(x^2 - 49)}$$

a) $-\frac{1}{56}$; *b)* $\frac{1}{56}$; *c)* $\frac{1}{48}$; *d)* $\frac{1}{48}$; *e)* 0.

SOLUŢIE 1.53. *Amplificând fracţia cu* $2 + \sqrt{x-3}$ *şi apoi simplificând prin* $x - 7$ *se obţine* $-\frac{1}{(2+\sqrt{x-3})(x+7)}$*. Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.54. *Să se determine:*

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$$

a) $-\infty$; *b)* $+\infty$; *c)* 0; *d)* 1; *e) nu există.*

SOLUŢIE 1.54. *Au loc inegalităţile* $0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$. *Răspuns corect c).*

PROBLEMA 1.55. *Se consideră funcţia* $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + px - 1}{x+1}$ *, unde* $p \in \mathbb{R}$. *Să se determine p astfel încât graficul funcţiei să admită asimptotă dreapta* $y = x + 1$ *la* $+\infty$.
a) 1; *b)* 2; *c)* 3; *d)* -1; *e)* -2; *f)* -3.

SOLUŢIE 1.55. *Panta asimptotei* $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, *iar* $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{(p-1)x - 1}{x+1} = p - 1 = 1$. *Răspuns corect c).*

PROBLEMA 1.56. *Se consideră funcţia* $f : (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$. *Să se determine ecuaţia asimptotei spre* $-\infty$ *la graficul lui f.*
a) $y = x$; *b)* $y = x - 2$; *c)* $y = -x + 2$; *d)* $y = -x$; *e) nu există.*

SOLUŢIE 1.56. *Funcţia nu are asimptotă orizontală deoarece*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{4}{x}} = +\infty.$$

Panta asimptotei oblice este $m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1 - \frac{4}{x}} = -1$. *Atunci* $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) + x) = 2$ *(se amplifică cu conjugatul* $\sqrt{x^2 - 4x} - x$*). Răspuns corect c).*

PROBLEMA 1.57. *Funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - a, & x < -1 \\ x - b, & x[-1, 1] \\ x^2 + a, & x > 1 \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}$ *dacă:*
a) $a = b = 0$; *b)* $a = 2, b = 0$; *c)* $a = 0, b = 1$; *d)* $a = 2, b = 1$; *e)* $a = b = 1$.

SOLUŢIE 1.57. *Limitele laterale ale funcţiei în punctele 1 şi -1 trebuie să fie egale. Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.58. *Se consideră funcţia* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (x + 1)lnx$. *Să se calculeze* $f'(1)$.
a) 1; *b)* 2; *c)* 3; *d)* 0; *e)* -1.

Soluţie 1.58. $f'(x) = lnx + (x+1)\frac{1}{x}$. *Răspuns corect b).*

Problema 1.59. *Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definită prin:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, x \le 2 \\ ax + b, x > 2 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.
a) $a = 4, b = 0$; *b)* $a = 3, b = 0$; *c)* $a \in \mathbb{R}, b = 5$; *d)* $a = 3, b \in \mathbb{R}$; *e)* $a = 4, b = -1$.

Soluţie 1.59. *Funcţia este necesar să fie continuă în* $x = 2$, *de unde* $a + b = 4$. *Din egalitatea derivatelor laterale în* $x = 2$ *rezultă* $a = 4$. *Răspuns corect a).*

Problema 1.60. *Să se determine coeficientul unghiular al tangentei în punctul* (e, e^2) *la graficul funcţiei* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = lnx + x^2 - 1$.
a) $e - 1$; *b)* $1 - e^2$; *c)* $1 + 2e^2$; *d)* $\frac{1}{e} + 2e - 1$; *e)* $\frac{1}{e} - 1$.

Soluţie 1.60. *Coeficientul unghiular căutat este* $m = f'(e)$, *unde* $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 1$. *Răspuns corect d).*

Problema 1.61. *Se consideră funcţiile* $f(x) = x^2$ *şi* $g(x) = -x^2 + 4x + c$, *unde* $c \in \mathbb{R}$. *Să se afle c astfel încât graficele lui f şi g să aibă o tangentă comună într-un punct de intersecţie a curbelor.*
a) $c = 1$; *b)* $c = -2$; *c)* $c = \frac{1}{2}$; *d)* $c = 2$; *e)* $c = -1$.

Soluţie 1.61. *În punctul x de intersecţie* $f(x) = g(x)$, *iar dacă tangenta la grafice este comună* $f'(x) = g'(x)$. *Din această ultimă relaţie rezultă* $x = 1$. *Răspuns corect b).*

Problema 1.62. *Să se afle soluţia inecuaţiei* $ln(x^2 + 1) > x$.
a) $x \in (0, +\infty)$; *b)* $x \in (-\infty, 1)$; *c)* $x \in (-\infty, 0)$; *d)* $x \in (1, +\infty)$; *e)* $x \in (-1, +\infty)$.

Soluţie 1.62. *Fie* $f(x) = ln(x^2 + 1) - x$, *funcţie definită pe* $\mathbb{R}$. *Derivata sa este* $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 1 = \frac{-(x-1)^2}{(x^2+1)} < 0$, *deci f este descrescătoare pe* $\mathbb{R}$. *Deoarece* $f(0) = 0$, *rezultă* $f(x) > f(0)$ *pentru* $x < 0$. *Răspuns corect c).*

Problema 1.63. *Să se determine valorile parametrului real m pentru care funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ln(1 + x^2) - mx$ *este monoton crescătoare pe* $\mathbb{R}$.
a) $(-1, 0]$; *b)* $[1, +\infty)$; *c)* $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; *d)* $(-\infty, -1]$; *e)* $[-1, 1]$.

Soluţie 1.63. $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - m \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *adică* $-mx^2 + 2x - m \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$. *Atunci* $m < 0$ *şi* $\Delta = 4 - 4m^2 \le 0$. *Răspuns corect d).*

PROBLEMA 1.64. *Să se afle punctele de extrem local ale funcţiei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definită prin* $f(x) = x^4 - 10x^2$, *precizând natura lor.*
a) $-\sqrt{5} = min, 0 = max, \sqrt{5} = min$; *b)* $0 = max, 5 = min$; *c)* $-\sqrt{5} = min, \sqrt{5} = max$; *d)* $0 = max, \sqrt{5} = max$; *e)* $-\sqrt{5} = max, 0 = min, \sqrt{5} = min$.

SOLUŢIE 1.64. *Din* $f'(x) = 4x^3 - 20x = 0$ *rezultă* $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{5}$ *şi* $x_3 = -\sqrt{5}$. *Tabloul de variaţie al funcţiei* $f(x)$ *stabileşte răspunsul corect a).*

PROBLEMA 1.65. *Să se determine mulţimea punctelor de inflexiune pentru funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.
a) $\{0, 3\}$; *b)* $\{0\}$; *c)* $\{0, 1\}$; *d)* $\emptyset$; *e)* $\{1\}$.

SOLUŢIE 1.65. $f''(x) = 6x - 6 = 0$, *rezultă* $x = 1$, *punct în care* f'' *îşi schimbă semnul. Răspuns corect e).*

PROBLEMA 1.66. *Fie* $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in (0, 1)$. *Considerăm proprietăţile:*
P1 : x_0 *este punct de extrem local al funcţiei* f
P2 : x_0 *este punct de inflexiune*
P3 : x_0 *este punct de întoarcere al graficului funcţiei* f
P4 : $f'(x_0) = 0$
Care din următoarele implicaţii este adevărată ?
a) $P_1 \Rightarrow P_4$; *b)* $P_4 \Rightarrow P_1$; *c)* $P_3 \Rightarrow P_1$; *d)* $P_3 \Rightarrow P_2$; *e)* $P_2 \Rightarrow P_4$.

SOLUŢIE 1.66. *Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.67. *Fie* m *şi* M *valorile extreme ale funcţiei*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + ax + b(a, b \in \mathbb{R}, a < 0).$$

Să se calculeze produsul $m \cdot M$ *în funcţie de* a *şi* b.
a) $\frac{a^3}{3} + b^2$; *b)* $27\frac{a^3}{4} + b^2$; *c)* $b^2 + 4\frac{a^3}{27}$; *d)* $a^2 + b^2$; *e)* 1.

SOLUŢIE 1.67. $f'(x) = 3x^2 + a = 0$, *rezultă* $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$, *puncte în care* f *are valori extreme.* $m \cdot M = f(x_1) \cdot f(x_2)$. *Răspuns corect c).*

PROBLEMA 1.68. *Să se afle mulţimea valorilor lui* $p \in \mathbb{R}$ *pentru care ecuaţia* $3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + p = 0$ *are rădăcină dublă negativă.*
a) $\{-23, -16\}$; *b)* $\{-23, 16\}$; *c)* $\{23, -16\}$; *d)* $\{23\}$; *e)* $\{16\}$.

SOLUŢIE 1.68. *Fie* $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 24x2 - 48x + p$, *de unde* $f'(x) = 12(x^3 + x^2 - 4x - 4)$. *Rădăcina dublă este rădăcină comună a ecuaţiilor* $f(x) = 0$ *şi* $f'(x) = 0$. *Derivata are rădăcini negative* $x_1 = -1$ *şi* $x_2 = -2$. *Din* $f(-1) = 0$ *şi* $f(-2) = 0$ *rezultă răspunsul corect a).*

Problema 1.69. *Să se precizeze în care din intervalele de mai jos se află punctul c din teorema lui Lagrange aplicată funcţiei* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=lnx$ *şi intervalului* $[1,2]$.
a) $\left(1,\frac{3}{2}\right)$; *b)* $\left(\frac{3}{2},2\right)$; *c)* $\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)$; *d)* $\left(\frac{7}{4},2\right)$; *e)* $(0,1)$.

Soluţie 1.69. *Funcţia f este continuă pe* $[1,2]$, *derivabilă pe* $(1,2), f'(x)=\frac{1}{x}$.*Atunci există* $c\in(1,2)$ *astfel încât* $f'(c)=f(2)-f(1)$. *Rezultă* $c=\frac{1}{ln2}$. *Deoarece* $e^2<8$, *prin logaritmare se obţine* $2<3ln2$, *de unde* $c=\frac{1}{ln2}<\frac{3}{2}$. *Răspuns corect a).*

Problema 1.70. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, x\leq 0\\ e^x, x>0\end{cases}.$$

Precizaţi care din următoarele funcţii reprezintă o primitivă a funcţiei f :

$$F_1(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x, x\leq 0\\ e^x, x>0\end{cases};F_2(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+c, x\leq 0\\ e^x+c, x>0\end{cases};$$

$$F_3(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x, x\leq 0\\ e^x-1, x>0\end{cases}.$$

a) toate; b) nici una; c) F_1; *d)* F_2; *e)* F_3.

Soluţie 1.70. *f este o funcţie continuă, deci admite primitive (funcţii derivabile* $F(x)$, *cu* $F'(x)=f(x)$*). Toate funcţiile* $F_i'(x)=f(x)$, *pentru* $x\neq 0 (i=1,2,3)$, *dar numai* F_3 *este continuă (şi derivabilă) şi în* $x=0$. *Răspuns corect e).*

Problema 1.71. *Se consideră funcţia* $f:\mathbb{R}\backslash\{1\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2-9x-27}{x^2-2x+1}.$$

Să se găsească numerele reale m, n şi p astfel încât funcţia $F:\mathbb{R}\backslash\{1\}\to\mathbb{R}$,

$$F(x)=\frac{mx^3+nx^2+px}{x-1}$$

să fie primitivă pentru f.
a) $m=1,n=27,p=9$; *b) a)* $m=1,n=\frac{9}{2},p=27$; *c)* $m=\frac{1}{2},n=\frac{9}{2},p=27$; *d)* $m=\frac{1}{2},n=-\frac{9}{2},p=27$; *e)* $m=-\frac{1}{2},n=\frac{9}{2},p=27$;

Soluţie 1.71. $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$. $F'(x)=\dfrac{2mx^3+(n-3m)x^2-2nx-p}{(x-1)^2}$. *Identificând cu* $f(x)$ *se obţine răspunsul corect c).*

PROBLEMA 1.72. *Calculaţi integrala nedefinită* $\int \frac{x+1}{x} dx$ *pentru orice* $x \in (a,b)$, *unde* $0 \notin (a,b)$.
a) $1 + lnx + C$; *b)* $ln\,|x+1| + C$; *c)* $x - \frac{1}{x^2} + C$; *d)* $x + ln\,|x| + C$; *e)* $x + \frac{1}{x^2} + C$.

SOLUŢIE 1.72. *Integrala se scrie* $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int dx + \int \frac{1}{x} dx$. *Răspunsul corect este d).*

PROBLEMA 1.73. *Calculaţi integrala nedefinită*

$$\int \left(\frac{e^x}{e^{2x}} + 2\right) dx.$$

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} arctg \left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right) + C$; *b)* $\frac{1}{2} arctg \left(\frac{e^x}{2}\right) + C$; *c)* $\frac{\sqrt{2}}{2} arctg \left(\frac{e^x}{2}\right) + C$;
d) $arctg \left(e^{2x} + 2\right) + C$; *e)* $\frac{1}{2} arctg \left(e^{2x} + 2\right) + C$.

SOLUŢIE 1.73. *Integrala devine* $\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C$, *unde* $t = e^x$. *Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.74. *Să se calculeze primitivele funcţiei:* $\varphi(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x, x \in \mathbb{R}$
a) $(x^2-2x-1)e^x+C$; *b)* $(x^2-4x+3)e^x+C$; *c)* $(x^2-1)e^x+C$; *d)* $(x^2-2x-1)e^x$; *e)* $(x^2 - 4x - 1)e^x$.

SOLUŢIE 1.74. *Integrând prin părţi* ($\int f \cdot g' dx = fg - \int f' \cdot g dx$, *cu* $f(x) = x^2 - 2x - 1$ *şi* $g'(x) = e^x$) *se obţine* $\int \varphi(x)dx = (x^2 - 2x - 1)e^x - \int (2x - 2)e^x dx$. *Integrând încă o dată prin părţi* ($f(x) = 2x - 2$ *şi* $g'(x) = e^x$) *se obţine răspunsul corect b).*

PROBLEMA 1.75. *Să se calculeze* $I = \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right) dx$.

a) $\frac{7}{5}$; *b)* $\frac{5}{2}$; *c)* 5; *d)* $\frac{5}{7}$; *e)* $\frac{2}{5}$.

SOLUŢIE 1.75. $I = \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right) \Big|_0^1 + x\Big|_0^1$. *Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.76. *Fie funcţia* $f : [1,3] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. *Să se determine* $c \in (1,3)$ *astfel încât*

$$\int_1^3 f(x)dx = 2f(c).$$

a) $\frac{1}{3}$; *b)* $\pm\sqrt{\frac{13}{3}}$; *c)* $\pm\sqrt{\frac{28}{3}}$; *d)* 2; *e)* $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

SOLUŢIE 1.76. $\int_1^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{26}{3} = 2c^2$. *Răspuns corect e).*

PROBLEMA 1.77. *Să se calculeze integrala* $I = \int_0^2 f(x)dx$ *ştiind că* $f(0) = 1$, *iar* $f'(x) = \begin{cases} 1-x, & pentru\ x \in [0,1] \\ x-1, & pentru\ x \in (1,2] \end{cases}$.

a) $I = 1$; *b)* $I = 2$; *c)* $I = 3$; *d)* $I = \frac{3}{2}$; *e)* $I = \frac{2}{3}$.

SOLUŢIE 1.77. $f(x) = \int f'(x)dx = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} + C_1, & pentru\ x \in [0,1] \\ \frac{x^2}{2} - x + C_2, & pentru\ x \in (1,2] \end{cases}$, *funcţie continuă. Din continuitatea în* $x = 1$ *rezultă* $C_2 = C_1 + 1$, *iar din condiţia* $f(0) = 1$ *rezultă* $C_1 = 1$. *Aşadar* $f(x) = \begin{cases} 1 + x - \frac{x^2}{2}, & pentru\ x \in [0,1] \\ 2 - x + \frac{x^2}{2}, & pentru\ x \in (1,2] \end{cases}$. *Atunci*

$I = \int_0^1 \left(1 + x - \frac{x^2}{2}\right) dx + \int_1^2 \left(2 - x + \frac{x^2}{2}\right) dx$. *Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.78. *Calculaţi valoarea integralei:* $I = \int_{-2}^2 (|x-1| + |x+1|)dx$.

a) 8; *b)* 5; *c)* 10; *d)* 9; *e)* 7.

SOLUŢIE 1.78. *Explicitând modulele*

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, x \geq 1 \\ 1-x, x < 1 \end{cases}, |x+1| = \begin{cases} x+1, x \geq -1 \\ -x-1, x < -1 \end{cases},$$

rezultă $I = \int_{-2}^{-1} (1-x-x-1) + \int_{-1}^{1} (1-x+x+1) + \int_1^2 (x-1+x+1)$. *Răspuns corect c).*

PROBLEMA 1.79. *Să se calculeze integrala:* $I = \int_2^3 \frac{x^2-2x+5}{x-1}dx$.

a) $I = \frac{3}{2} - 4ln2$; *b)* $I = -\frac{1}{2} - 4ln2$; *c)* $I = -\frac{3}{2} + 4ln2$; *d)* $I = \frac{3}{2} + 4ln2$; *e)* $I = -\frac{1}{2} + 4ln2$.

SOLUŢIE 1.79. *Integrala se scrie* $I = \int\limits_2^3 (x-1+\frac{4}{x-1}dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + ln\,|x-1|\right)\Big|_2^3.$

Răspuns corect d).

PROBLEMA 1.80. *Să se calculeze* $I = \int\limits_0^1 x arctgx dx.$

a) $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$; *b)* $I = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}$; *c)* $I = \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2}$; *d)* $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$; *e)* $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}$.

SOLUŢIE 1.80. *Integrând prin părţi* ($f(x) = arctgx, g'(x) = x$, *deci* $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$) *rezultă*

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2}arctgx\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}arctgx\Big|_0^1. \end{aligned}$$

Răspuns corect a).

CAPITOLUL 2

Probleme Fizică

PROBLEMA 2.1. *Care din următoarele afirmaţii este falsă:*

A. *curba descrisă de un mobil în timpul mişcării sale se numeşte traiectorie;*

B. *în cazul mişcării rectilinii, coordonata x a corpului este distanţa de la originea O până la corp;*

C. *legea mişcării (ecuaţia cinematică a mişcării rectilinii) este x=f(t), unde t este timpul;*

D. *pentru a descrie mişcarea unui corp în plan trebuie să cunoaştem* $x = f(t_1); x = f(t_2)$ *, unde* t_1 *şi* t_2 *sunt două momente în timpul mişcării;*

E. *mişcarea plană a mobilului se descompune în două mişcări rectilinii după două axe alese.*

PROBLEMA 2.2. *Proiecţia unui vector pe o direcţie este:*

A. *maximă când vectorul face un unghi de* $0°$ *cu direcţia;*

B. *maximă când vectorul face un unghi de* $30°$ *cu direcţia;*

C. *maximă când vectorul face un unghi de* $45°$ *cu direcţia;*

D. *maximă când vectorul face un unghi de* $60°$ *cu direcţia;*

E. *maximă când vectorul face un unghi de* $90°$ *cu direcţia.*

PROBLEMA 2.3. *Care este timpul necesar unei bărci pentru a traversa un râu:*

a) *pe drumul cel mai scurt,* t_1*;*

b) *în timpul cel mai scurt,* t_2*.*

Se dau: viteza râului v, lăţimea râului d, viteza bărcii faţă de apă u (u>v). (Aplicaţie numerică d=20 m, u=5 m/s , v=3 m/s).

A. $\begin{cases} t_1 = 5s \\ t_2 = 4s \end{cases}$; B. $\begin{cases} t_1 = 6s \\ t_2 = 5s \end{cases}$; C. $\begin{cases} t_1 = 5s \\ t_2 = 6s \end{cases}$

D. $\begin{cases} t_1 = 6s \\ t_2 = 7s \end{cases}$; E. $\begin{cases} t_1 = 5s \\ t_2 = 8s \end{cases}$.

PROBLEMA 2.4. *Indicatorul orelor şi indicatorul minutelor se suprapun perfect la ora 12. Să se determine timpul minim după care cele două se suprapun din nou.*

A. $t = 3823,2s$;

B. $t = 4236,4s$;

C. $t = 4029,3s$;

D. $t = 3927,2s$;

E. $t = 12$ *ore.*

PROBLEMA 2.5. *Un tren trece cu viteza v=20m/s paralel cu un zid lung care se află la o distanţă necunoscută x. Un călător din tren emite un semnal sonor şi după 3 secunde aude ecoul. Dându-se viteza sunetului* $v_s = 340\ m/s$ *să se determine distanţa x.*

A. $x = \frac{2}{t}(v_s^2 - v^2) = 50,9m$;
B. $x = \frac{t}{2}(v_s^2 - v^2) = 5,09m$;
C. $x = \frac{t}{2}\sqrt{v_s^2 - v^2} = 509m$;
D. $x = \frac{t}{2}\sqrt{v_s^2 + v^2} = 509m$;
E. $x = v_0 \cdot t = 340 \cdot t = 1020m$.

PROBLEMA 2.6. *Viteza momentană a unui punct material are una din următoarele caracteristici:*
A. *are aceeaşi valoare faţă de orice sistem de referinţă;*
B. *se modifică în timpul mişcării, dacă mişcarea este rectilinie uniformă;*
C. *este tangentă la traiectoria urmată de punctul material;*
D. *este tangentă la punctul material în tot timpul mişcării;*
E. *este normală la raza vectoare momentană a punctului material.*

PROBLEMA 2.7. *Traiectoria unui punct de pe elicea unui avion aflat în mişcare rectilinie uniformă, este un punct faţă de:*
A. *avion;*
B. *un călător din avion;*
C. *centrul elicei;*
D. *un observator de pe Pământ;*
E. *alt punct al elicei.*

PROBLEMA 2.8. *Care sunt cele două unităţi de măsură necesare pentru a descrie viteza?*
A. *amperul şi metrul;*
B. *metrul şi secunda;*
C. *candela şi secunda;*
D. *amperul şi secunda;*
E. *amperul şi candela.*

PROBLEMA 2.9. *Asupra unui corp cu masa $m = 4$ kg ce se deplasează fără frecare pornind din repaus şi din originea axelor de coordonate, acţionează forţa variabilă $F(t) = (2 + 8t)N$, unde t este exprimat în secunde. Viteza corpului la momentul $t_1 = 6$ s de la începutul mişcării este:*
A. $v = 25\ m/s$;
B. $v = 39,8\ m/s$;
C. $v = 82\ m/s$;
D. $v = 150\ m/s$;
E. $v = 39\ m/s$.

PROBLEMA 2.10. *În mişcarea rectilinie şi uniform variată, fără viteză iniţială, distanţa x parcursă de corp este proporţională cu:*
A. v^2; B. v; C. v^3;
D. $\sqrt{v}$; E. $\sqrt{v^3}$.

PROBLEMA 2.11. *Un fir inextensibil, de care este atârnată o bilă de masă m, este deviat cu unghiul φ_0 de la verticală şi apoi este lăsat liber. Se cere să se calculeze tensiunea în fir în funcţie de unghiul φ ($\varphi < \varphi_0$).*
A. $T = mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)$;

B. $T = mg(\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)$;
C. $T = mg(3\cos\varphi - \cos\varphi_0)$;
D. $T = mg(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$;
E. $T = \dfrac{mg}{(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)}$.

PROBLEMA 2.12. *Expresia corectă pentru forţa de inerţie este:*
A. $\vec{F}_i = m\vec{a}$;
B. $F_i = \dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$;
C. $\vec{F}_i = -m\vec{a}$;
D. $F_i = kx$;
E. $F_i = -kx$.

PROBLEMA 2.13. *Un copil aflat într-un vagon aruncă o minge vertical în sus. În ce condiţii mingea revine în mâinile sale:*
A. *vagonul se mişcă uniform rectiliniu;*
B. *vagonul se mişcă rectiliniu uniform accelerat;*
C. *vagonul se mişcă rectiliniu uniform încetinit;*
D. *vagonul se mişcă uniform circular;*
E. *nici un răspuns nu este corect.*

PROBLEMA 2.14. *Componenta paralelă cu planul înclinat a greutăţii imprimă corpului o acceleraţie:*
A. $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{mg\sin\alpha}{m} = g\sin\alpha$;
B. $a = g\cos\alpha$; *C.* $a = gtg\alpha$;
D. $a = \dfrac{g}{\sin\alpha}$; *E.* $a = \mu g$.

PROBLEMA 2.15. *Forţa gravitaţională dintre două corpuri punctiforme cu masele m_1 şi m_2 este dată de expresia:*
A. $F = mg$; *B.* $F = k\dfrac{m_1 - m_2}{r^2}$;
C. $F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}g$; *D.* $F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$;
E. $F = k\dfrac{r^2}{m_1 m_2}$.

PROBLEMA 2.16. *Un corp aruncat orizontal din vârful unui plan înclinat spre baza sa a căzut pe planul înclinat la distanţa $l = 30$ m de vârf. Cu ce viteză iniţială v_0 a fost aruncat corpul? Unghiul de înclinare al planului faţă de orizontală este $\alpha = 30°$; se consideră $g = 10\ m/s^2$.*
A. $v_0 = 7,5\ m/s$; *B.* $v_0 = 15\ m/s$;
C. $v_0 = 65,80\ m/s$; *D.* $v_0 = 12\ m/s$;
E. $v_0 = 30\ m/s$.

PROBLEMA 2.17. *Teorema de variaţie a energiei cinetice se va scrie:*
A. $\Delta E_c = E_{c_1} - E_{c_2}$ *sau* $L = E_{c_1} - E_{c_2}$ *sau* $Fd = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2}$;
B. $\Delta E_c = E_{p_1} - E_{c_2}$;
C. $L = E_c - E_p$;
D. $L = \Delta E_c = E_{p_1} - E_{p_2}$;

E. $L = \frac{mv^2}{2}$.

Problema 2.18. *Un corp este aruncat pe verticală în sus de la suprafaţa pământului cu viteza $v_0 = 10\ m/s$. La ce înălţime energia cinetică a corpului este egală cu energia sa potenţială? (se va lua $g = 10\ m/s^2$)*

A. $h = \frac{v_0^2}{4g} = 2,5m$; *B.* $h = \frac{v_0}{2g} = 0,5m$;
C. $h = \frac{v_0^2}{g} = 10m$; *D.* $h = \frac{2v_0^2}{g} = 20m$;
E. $h = v_0 = 10m$.

Problema 2.19. *Puterea este egală cu:*

A. $\frac{L}{t}$; *B.* $\frac{mv^2}{t}$; *C.* Ft;
D. $\frac{F}{v}$; *E.* $\frac{L}{Ft}$.

Problema 2.20. *Un corp de masă m=3 kg cade liber dintr-un punct aflat la înălţimea h=7 m faţă de suprafaţa pământului. Care este energia potenţială E_p a corpului după ce a parcurs o distanţă $h_1 = \frac{h}{3}$? Se consideră $g = 10\ m/s^2$.*

A. $E_p = 140J$; *B.* $E_p = 70J$; *C.* $E_p = 210J$;
D. $E_p = 315J$; *E.* $E_p = 105J$.

Problema 2.21. *Precizaţi care dintre afirmaţiile următoare, referitoare la sistemele mecanice, este adevărată:*

A. *lucrul mecanic al forţelor conservative este egal cu diferenţa dintre energia cinetică şi cea potenţială ale acestuia;*

B. *lucrul mecanic al forţelor conservative este egal cu variaţia energiei mecanice a acestuia;*

C. *lucrul mecanic al forţelor conservative este egal şi de semn opus cu variaţia energiei mecanice a acestuia;*

D. *lucrul mecanic al forţelor conservative este egal cu variaţia energiei potenţiale a acestuia;*

E. *lucrul mecanic al forţelor conservative este egal şi de semn opus cu variaţia energiei potenţiale a acestuia.*

Problema 2.22. *Lucrul mecanic al forţei elastice este:*

A. $L = \frac{kx^2}{2}$; *B.* $L = \frac{kx}{2}$; *C.* $L = \frac{x\sqrt{k}}{2}$;
D. $L = kx$; *E.* $L = -\frac{kx^2}{2}$.

Problema 2.23. *Care din următoarele definiţii este incorectă?*

A. *energia cinetică a unui corp de masă m, care se află în mişcare de translaţie cu viteza v, în raport cu un sistem de referinţă inerţial, este egală cu semiprodusul dintre masa corpului şi pătratul vitezei acestuia;*

B. *variaţia energiei cinetice a unui punct material, care se deplasează în raport cu un sistem de referinţă inerţial, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţa rezultantă care acţionează asupra punctului material în timpul acestei variaţii;*

C. *lucrul mecanic efectuat de către forţele conservative care acţionează în sistem este egal şi de semn opus cu energia potenţială a acestuia;*

D. energia mecanică, $E = E_c + E_p$, a unui sistem izolat în care acţionează forţe conservative este constantă, deci energia mecanică a acestui sistem se conservă;
E. energia este o mărime fizică scalară ce caracterizează capacitatea unui corp sau a unui sistem de corpuri de a produce lucru mecanic.

PROBLEMA 2.24. *Un corp de masă m=1kg alunecă un timp de 2 secunde pe un plan înclinat de lungime l=4m, pornind din repaus din punctul de înălţime maximă al planului înclinat. Unghiul dintre planul înclinat şi orizontală este $\alpha = 30°$. Se cere să se găsească lucrul mecanic efectuat împotriva forţelor de frecare, în timpul coborârii pe planul înclinat şi randamentul planului înclinat.*

A. $L_f = m\left(g\sin\alpha - \frac{2l}{t^2}\right) = 3J$;
B. $L_f = ml\,(g\sin\alpha - l) = 4J$;
C. $L_f = ml\sin\alpha = 2J$;
D. $L_f = ml\left(g - \frac{2l}{t^2}\right) = 32J$;
E. $L_f = ml\left(g\sin\alpha - \frac{2l}{t^2}\right) = 12J$.

PROBLEMA 2.25. *Energia potenţială a unui resort depinde de:*
A. *lungimea iniţială a resortului;*
B. *natura materialului din care este realizat resortul;*
C. *sistemul de referinţă ales;*
D. *starea de comprimare sau întindere;*
E. *pătratul constantei elastice a resortului.*

PROBLEMA 2.26. *Sarcina electrică nu are una din următoarele proprietăţi:*
A. *produce în jurul său un câmp electric;*
B. *este acţionată de o forţă, dacă se află în câmp electric;*
C. *este o mărime fizică scalară;*
D. *poate avea orice valoare numerică reală;*
E. *se conservă într-un sistem fizic izolat electric.*

PROBLEMA 2.27. *Forţa de atracţie dintre două sarcini punctiforme încărcate poate fi calculată folosind:*
A. *legea a II-a lui Newton;*
B. *legea lui Coulomb;*
C. *legea lui Joule;*
D. *legea lui Ohm;*

PROBLEMA 2.28. *Formula legii lui Coulomb este:*
A. $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{r}$; B. $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{r}$; C. $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{r}$;
D. $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^3}\vec{r}$; E. $F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^3}\vec{r}$.

PROBLEMA 2.29. *Un condensator plan încărcat electric este introdus într-un lichid cu permitivitatea electrică relativă ε_r. Dacă se scoate lichidul dintre armăturile condensatorului, atunci intensitatea câmpului electric dintre armăturile condensatorului:*
A. *scade de $2\varepsilon_r$ ori;*
B. *devine egală cu zero;*

C. *creşte de ε_r ori;*
D. *nu se modifică;*
E. *creşte de $2\varepsilon_r$ ori.*

PROBLEMA 2.30. *Tensiunea electrică între două puncte A şi B situate la distanţa $d = 10cm$ într-o regiune a spaţiului în care există un câmp electric uniform de intensitate $E = 10^4 V/m$ este $U = 500V$. Despre orientarea liniilor de câmp faţă de segmentul AB se poate afirma că:*
A. *sunt perpendiculare pe AB;*
B. *sunt paralele cu AB;*
C. *fac un unghi egal cu $\frac{\pi}{3}$ cu segmentul AB;*
D. *fac un unghi egal cu $\frac{\pi}{6}$ cu segmentul AB;*
E. *fac un unghi egal cu 45° cu segmentul AB.*

PROBLEMA 2.31. *Care din următoarele mărimi este vectorială:*
A. *potenţialul electric;*
B. *tensiunea electrică;*
C. *intensitatea câmpului electric;*
D. *fluxul electric;*
E. *sarcina electrică.*

PROBLEMA 2.32. *Specificaţi care dintre afirmaţiile următoare este falsă:*
A. *un conductor electrizat, a cărui sarcină electrică liberă este în repaus, se află în echilibru electrostatic;*
B. *în interiorul unui conductor aflat în echilibru electrostatic intensitatea câmpului electrostatic este nulă;*
C. *conductorii aflaţi în echilibru electrostatic se caracterizează prin absenţa sarcinilor electrice libere în interiorul lor;*
D. *vectorul intensitate a câmpului electrostatic şi forţa electrică ce se exercită asupra sarcinilor cu care este încărcat conductorul aflat în echilibru electrostatic sunt tangente la suprafaţa conductorului;*
E. *suprafaţa unui conductor izolat este o suprafaţă echipotenţială.*

PROBLEMA 2.33. *În cazul câmpului electric creat de o sarcină punctiformă, diferenţa de potenţial dintre două puncte M şi N, $U = V_M - V_N$, este dată de relaţia:*
A. $\frac{Qq}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_N}\right)$; *B.* $\frac{Q}{4\pi\varepsilon q}\left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_N}\right)$;
C. $QL_{M\to N}$; *D.* $\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_M^2} - \frac{1}{r_N^2}\right)$;
E. $\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_N}\right)$.

PROBLEMA 2.34. *Să se determine intensitatea câmpului electric produs de un nucleu de hidrogen la o distanţă $a = 5,3 \cdot 10^{-11}m$. Se dă $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}F/m$; sarcina electrică elementară $q = 1,6 \cdot 10^{-19}C$.*
A. $E = 2,6 \cdot 10^7 V/m$; *B.* $E = 5,1 \cdot 10^{11} V/m$;
C. $E = 3,9 \cdot 10^4 V/m$; *D.* $E = 2,8 \cdot 10^{-4} V/m$;
E. $E = 3,7 \cdot 10^4 V/m$;

PROBLEMA 2.35. *Două sarcini electrice pozitive* $q_1 = 4q$ *şi* $q_2 = 9q$ *se află una faţă de alta la distanţa* $d = 1m$. *Punctul în care intensitatea câmpului electric produs de cele două sarcini se anulează este la distanţa:*

A. $x = 0,5m$ *între sarcini;*
B. $x = 0,4m$ *de sarcina* q_1, *între sarcini;*
C. $x = \frac{2}{3}m$ *de partea lui* q_1, *în exterior;*
D. $x = 5m$ *de partea lui* q_1, *în exterior;*
E. $x = 1m$ *de partea lui* q_2, *în exterior.*

PROBLEMA 2.36. *Lucrul mecanic efectuat la deplasarea sarcinii electrice* $q = 10^{-7}C$ *între punctele A şi B în câmpul electric creat de sarcina electrică* $Q = 3 \cdot 10^{-3}C$, *aflată în punctul O* $\left(OA = r_1 = 0,3m;\ OB = r_2 = 90cm;\ 4\pi\varepsilon = \frac{1}{9 \cdot 10^9}\frac{F}{m}\right)$ *are valoarea:*

A. $L = 0,1J$; B. $L = 2mJ$; C. $L = 1J$;
D. $L = 5J$; E. $L = 6J$.

PROBLEMA 2.37. *Trei condensatoare, cu capacităţile de* $20\mu F$, $40\mu F$ *şi* $120\mu F$ *sunt conectate în serie. Ce capacitate are gruparea:*

A. $180\mu F$; B. $120\mu F$; C. $18\mu F$;
D. $12\mu F$; E. $\frac{1}{12}\mu F$.

PROBLEMA 2.38. *Masa de substanţă depusă la catodul unui dispozitiv de electroliză este:*

A. *independentă de durata procesului de electroliză;*
B. *direct proporţională cu temperatura electrolitului;*
C. *independentă de intensitatea curentului electric din circuit;*
D. *direct proporţională cu sarcina electrică transportată prin circuit;*
E. *independentă de natura electronului.*

PROBLEMA 2.39. *Care este rezistenţa adiţională* R_a *conectată la un voltmetru de rezistenţă* R_V, *ce măsoară o tensiune* U_V, *pentru a putea măsura o tensiune* $U = nU_V$:

A. $R_a = U(n-1)$; B. $R_a = \frac{nU_V}{R_v}$;
C. $R_a = \frac{U_V(n-1)}{R_V}$; D. $R_a = R_V(n-1)$;
E. $R_a = \frac{R_V}{n-1}$.

PROBLEMA 2.40. *Care este valoarea în Jouli a unui* kWh:

A. $4,18 \cdot 10^3 J$; B. $3,6 \cdot 10^6 J$; C. $7,1 \cdot 10^6 J$;
D. $2,9 \cdot 10^5 J$; E. $5,7 \cdot 10^4 J$.

PROBLEMA 2.41. *Cum se conectează un voltmetru într-un circuit electric:*

A. *în serie;*
B. *în paralel;*
C. *având în paralel pe el un condensator pentru protecţie;*
D. *lângă sursa electrică;*
E. *în partea opusă sursei electrice.*

PROBLEMA 2.42. *De câte ori scade puterea unui bec electric dacă se reduce la jumătate tensiunea de alimentare (se presupune că rezistenţa filamentului este R=const.)?*

A. De două ori.
B. De patru ori.
C. De trei ori.
D. Nu scade.
E. Creşte de două ori.

PROBLEMA 2.43. *O baterie are t.e.m. de 32V , iar bornele ei se unesc printr-un fir lung de 3m. În fir se produce o cădere de potenţial de 30V şi se consumă o putere de 6W. Ce lungime trebuie să aibă firul ca diferenţa de potenţial între capetele lui să fie de 12V?*

A. 6m; *B.* 4m; *C.* 0,5m;
D. 0,12m; *E.* 0,75m.

PROBLEMA 2.44. *Care este expresia forţei electromagnetice?*

A. $F = \frac{BI}{l}\sin\alpha$; *B.* $F = BIl\sin\alpha$;
C. $F = \frac{B}{lI}\sin\alpha$; *D.* $F = \frac{BI}{l\sin\alpha}$; *E.* $F = \frac{BIl}{\sin\alpha}$.

PROBLEMA 2.45. *Un solenoid cu lungimea l, care are N spire, este parcurs de un curent I. În interiorul solenoidului nu se găseşte nimic. Inducţia magnetică B în interiorul solenoidului este:*

A. $B = \mu_0\frac{NI}{l}$; *B.* $B = \mu_0\mu_r\frac{Nl}{I}$; *C.* $B = \mu_r\frac{NI}{l}$;
D. $B = \frac{\mu_0 Nl;}{I^2}$; *E.* $B = 0$.

PROBLEMA 2.46. *În cazul unui conductor rectiliniu lung, ce relaţie nu este corectă pentru inducţia magnetică:*

A. $B = k\frac{I}{r}$; *B.* $B = \frac{\mu_0\mu_r I}{2\pi r}$; *C.* $B = \mu_0\frac{I}{2\pi r}$;
D. $B = \mu_0\frac{I}{2r}$; *E.* $B = \frac{\mu_0\mu_r}{\pi}\frac{I}{2r}$.

PROBLEMA 2.47. *Forţa Lorentz are expresia:*

A. $F = BIlv$; *B.* $F = qlB\sin\alpha$; *C.* $F = qvB\sin\alpha$;
D. $F = qE$; *E.* $F = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon r^2}$.

PROBLEMA 2.48. *Prin două conductoare paralele de lungime infinită circulă doi curenţi $I_1 = 1A$ şi $I_2 = 2A$, distanţa dintre ele fiind $d_1 = 10cm$. Forţa de interacţiune dintre ele (raportată la unitatea de lungime) este F_1. Dacă intensităţile curenţilor devin $I_1 = 6A$ şi $I_2 = 10A$, iar distanţa dintre ele devine $d_2 = 2cm$, atunci forţa de interacţiune pe unitate de lungime va fi F_2. Raportul $n = \frac{F_2}{F_1}$ este:*

A. $n = 150$; *B.* $n = 120$; *C.* $n = 15$; *D.* $n = 12$; *E.* $n = 30$.

PROBLEMA 2.49. *Un solenoid are $N = 100$ spire, lungimea $l = 5cm$ şi aria secţiunii cilindrice $A = 0,3cm^2$. Ştiind că $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}Tm/A$, inductanţa solenoidului va fi aproximativ egală cu:*

A. $6\mu H$; *B.* $6,5\mu H$; *C.* $7\mu H$;
D. $7,5\mu H$; *E.* $8\mu H$.

PROBLEMA 2.50. *Un conductor cu lungimea de 1m, parcurs de un curent de 5A, se află într-un câmp de inducţie magnetică de 1,5T. Direcţia conductorului face cu direcţia liniilor de câmp un unghi de* $30°$. *Să se determine forţa F la care este supus conductorul:*

A. $F = 7N$; *B.* $F = 5,25N$; *C.* $F = 3,75N$;
D. $F = 7,5N$; *E.* $F = 5N$.

PROBLEMA 2.51. *O particulă încărcată electric cu sarcina q, care intră cu viteza* $\vec{v}$ *într-un câmp magnetic de* $\vec{B}$, *perpendicular pe acesta, descrie o mişcare circulară. Raza traiectoriei şi frecvenţa mişcării circulare sunt date de expresiile:*

A. $r = \frac{mv^2}{2qB}$ $\quad v = \frac{qB}{2\pi m}$;
B. $r = \frac{mv^2}{qB}$ $\quad v = \frac{qB}{m}$;
C. $r = \frac{mv}{qB}$ $\quad v = \frac{m}{qB}$;
D. $r = \frac{mv^2}{\pi B}$ $\quad v = \frac{qBm}{r}$;
E. $r = \frac{mv}{qB}$ $\quad v = \frac{qB}{2\pi m}$.

PROBLEMA 2.52. *Un avion zboară paralel cu suprafaţa pământului cu viteza* $v = 1080Km/h$. *Anvergura aripilor este 12m, iar componenta verticală a câmpului magnetic terestru este* $B_V = 0,5 \cdot 10^{-4}T$. *Ce diferenţă de potenţial apare între vârfurile aripilor sale?*

A. $1V$; *B.* $10^{-3}V$; *C.* $0,180V$;
D. $0,4V$; *E.* $10V$.

RĂSPUNSURI

2.1	D	2.27	B
2.2	A	2.28	A
2.3	A	2.29	C
2.4	D	2.30	C
2.5	C	2.31	C
2.6	C	2.32	D
2.7	E	2.33	E
2.8	B	2.34	B
2.9	E	2.35	B
2.10	A	2.36	E
2.11	A	2.37	D
2.12	C	2.38	D
2.13	A	2.39	D
2.14	A	2.40	B
2.15	D	2.41	B
2.16	B	2.42	B
2.17	A	2.43	D
2.18	A	2.44	B
2.19	A	2.45	A
2.20	A	2.46	D
2.21	E	2.47	C
2.22	E	2.48	A
2.23	C	2.49	D
2.24	E	2.50	C
2.25	B	2.51	E
2.26	D	2.52	C